ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1987

MATHEMATIQUES I

(3 pages dactylographiées)

TA

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞, admettant la période 2π. Pour tout $f \in E$ et tout $p \in \mathbb{Z}$ on posera

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ipt}\, dt$$

PREMIERE PARTIE

I.1. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, la dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. (On conviendra que $f^{(0)} = f$).

Pour une fonction f de E, on note $\| f \|$ la borne supérieure de $| f(t) |$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

I.2. a) Soit $f \in E$; calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f^{(n)}}(p)$, en fonction de $\hat{f}(p)$, de n et de p.

Etablir, pour $p \neq 0$, l'inégalité :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|}{|p^n|}$$

b) Montrer que, pour toute fonction f de E et tout $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|p| \to +\infty} |p^m|\, \hat{f}(p) = 0$$

I.3. Soit une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, $p \mapsto c_p$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|p| \to +\infty} |p|^k\, c_p = 0$$

a) Montrer que les séries de fonctions $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$.

b) Si l'on pose $f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, montrer que f appartient à E et que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(p) = c_p$.

DEUXIEME PARTIE

On désigne par E_0 l'ensemble des fonctions f de E ayant la propriété suivante : il existe $M > 0$ et $A > 0$ (pouvant l'un et l'autre dépendre de f) tels que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f^{(n)}\| \leqslant M A^n$$

II.1. Montrer, que, si f et g sont deux éléments de E_0 et θ une constante complexe, alors θf, $f + g$, fg et f' sont éléments de E_0.

II.2.a) Soit $f \in E_0$. Déduire de I.2.a que $\hat{f}(p)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

b) Soit q un entier strictement positif, on définit f par

$$f(t) = \sum_{p=-q}^{q} c_p e^{ipt} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f^{(n)}\| \leqslant M q^n$$

et que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'inégalité : $\|f^{(n)}\| \leqslant M' A^n$, alors $A \geqslant q$.

c) Montrer que les fonctions du type $t \mapsto (\cos t)^m (\sin t)^n$, m et n étant deux entiers positifs ou nuls, sont dans E_0. Comment peut-on décrire les éléments de E_0 à l'aide de ces fonctions ?

II.3. Pour la fonction $f(t) = (\cos t)^m$, trouver tous les couples (M,A) de réels strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\| \leqslant M A^n$.

TROISIEME PARTIE

On désigne par E_1 l'ensemble des fonctions f de E ayant la propriété suivante : il existe $M > 0$ et $A > 0$ (pouvant l'un et l'autre dépendre de f) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|f^{(n)}\| \leqslant M(n!)A^n$

On admettra l'inégalité suivante, valable pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{n!}{e} \leqslant n^n e^{-n} \sqrt{n} \leqslant n! \qquad (1)$$

III.1. Montrer que si f et g sont dans E_1 il en est de même de $f + g$, f', fg.

III.2. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $r = |b| < 1$. On considère la fonction :

$$t \mapsto \phi_b(t) = \frac{1}{1 - b e^{it}}$$

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_b^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (ip)^n b^p e^{ipt}$$

b) Etudier les variations de la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^n r^{\frac{x}{2}}$; préciser son maximum.

En déduire que ϕ_b appartient à E_1 (on pourra utiliser (1)).

Est-ce que ϕ_b est élément de E_0 ?

c) Soit $a \in \mathbb{C}$, a de module différent de 1.

Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{a - e^{it}}$ appartient à E_1.

III.3. Montrer que la fonction qui, à tout t réel, associe $\frac{\sin t}{5 - 3\cos t}$ appartient à E_1, et donner son développement en série de Fourier réelle, c'est-à-dire du type $\alpha_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} (\alpha_p \cos pt + \beta_p \sin pt)$.

.../...

TOURNER LA PAGE

III.4. f et g étant deux éléments de E_0, g n'étant nulle pour aucune valeur de t, montrer que la fonction qui, à tout t réel, associe $\frac{f(t)}{g(t)}$ est dans E_1.

III.5. Soit $f \in E$ possédant la propriété suivante : il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'on ait :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant \lambda e^{-\mu |p|}$$

Montrer que f appartient à E_1.

QUATRIEME PARTIE

IV.I.a) Soit $x > 0$ et la suite $U_n(x) = \frac{n!}{x^n}$.

Montrer, pour tout $n \in N$ et tout $x \geqslant 1$, que l'on a : $U_n(x) \geqslant U_{[x]}(x)$, [x] désignant la partie entière de x. (On distinguera deux cas : $n > [x]$ et $n \leqslant [x]$).

b) On pose : $\varphi(x) = U_{[x]}(x)$ pour $x > 0$.

Etablir l'existence d'une constante H telle que, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant H e^{-x/2}$

IV.2. Montrer, pour une fonction f de E_1 telle que, pour tout $n \in N$,

$$\| f^{(n)} \| \leqslant M(n!) A^n$$

la relation suivante :
pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant M \varphi\left(\frac{|p|}{A}\right).$$

IV.3. Montrer que, pour $f \in E_1$ il existe $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on ait :

$$|\hat{f}(p)| \leqslant \lambda e^{-\mu |p|}$$

****
***
*